



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ)
ΤΕΣΤ - ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:

ΒΑΘΜΟΣ:

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

ΘΕΜΑ 1^ο (2005)

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση $2f'(x) = e^{x-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και $f(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = \ln\left(\frac{1 + e^x}{2}\right)$$

ΘΕΜΑ 2^ο (2002)

Έστω η συνάρτηση f , ορισμένη στο \mathbb{R} , με συνεχή δεύτερη παράγωγο που ικανοποιεί τις σχέσεις: $f(0) = 2f'(0) = 1$ και

$$f''(x) \cdot f(x) + (f'(x))^2 = f(x) \cdot f'(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f .

ΘΕΜΑ 3^ο (2006)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln(x+1) - (x+1) \ln x$ με $x > 0$

α) Να αποδείξετε ότι $\ln(x+1) - (x+1) \ln x < \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

ΘΕΜΑ 4^ο (2006)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-5) + 2x - 12$

α) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2006$ έχει μοναδική λύση στο πεδίο ορισμού της f .

ΘΕΜΑ 5^ο (2002)

Δίνεται η παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} συνάρτηση f που ικανοποιεί τις σχέσεις $f(0) = 0$ και $f(x) - e^{-f(x)} = x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να εκφράσετε την f' ως συνάρτηση της f .

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$ για κάθε $x > 0$